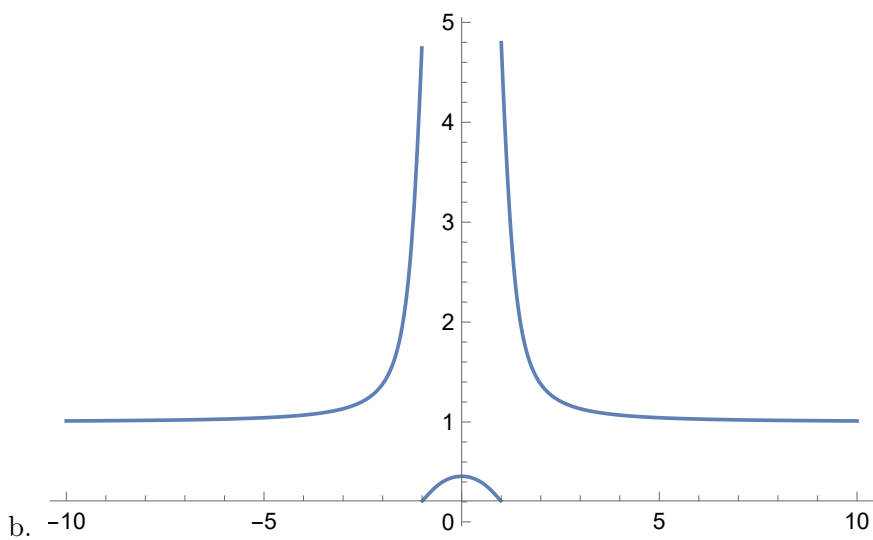
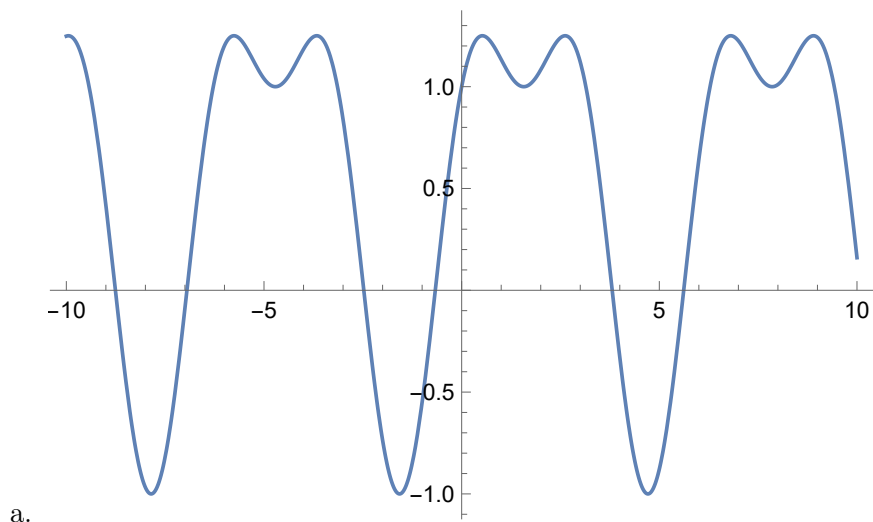


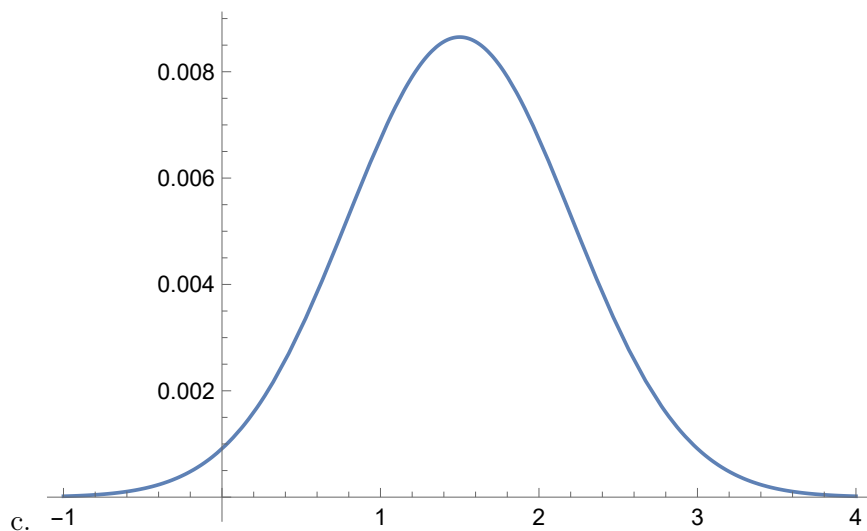
11. cvičení - výsledky
22. 12. 2022

Příklad 1.

- a. $\frac{152}{37}$
- b. 1
- c. $\frac{1}{6}$
- d. $-\frac{1}{3}$
- e. 0
- f. 1

Příklad 2.





d. $D(f) = [-1, \infty)$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spojitých funkcí.

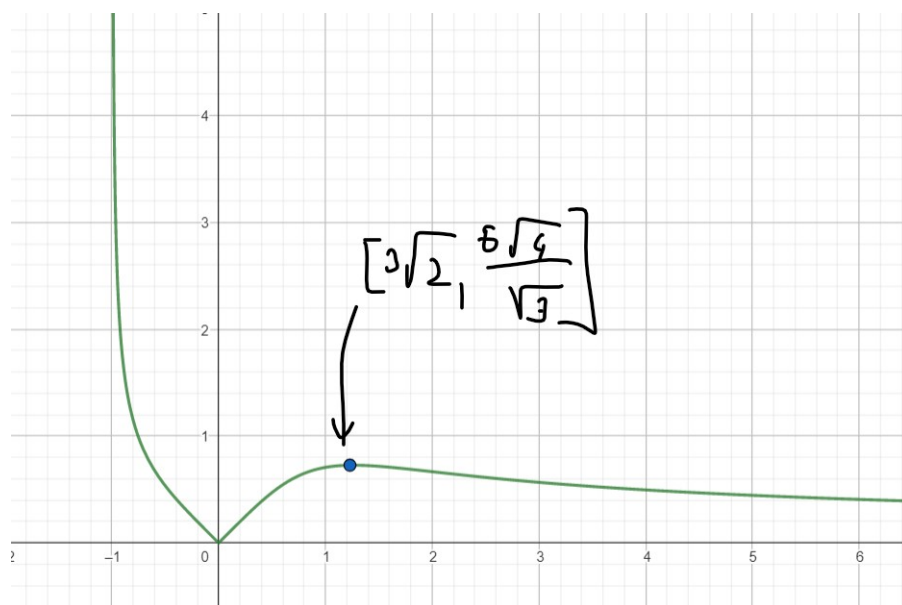
$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Tedy f je na $(-1, \sqrt[3]{2})$ rostoucí a na $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ klesající.

Lokální maximum je bod $\left[\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt{3}}\right]$.

Funkce f je tedy na intervalu $(-1, 2)$ konkávní a na intervalu $(2, \infty)$ konvexní.



e. $D(f) = \mathbb{R}$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spojitých funkcí.

f je π -periodická.

Na $(0, \pi)$ platí následující.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$$

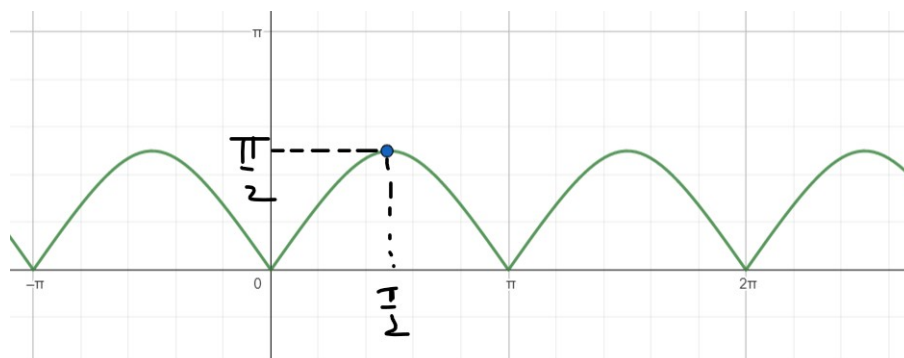
$$\lim_{x \rightarrow \pi-} f(x) = 0$$

f je na $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí a na $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ klesající.

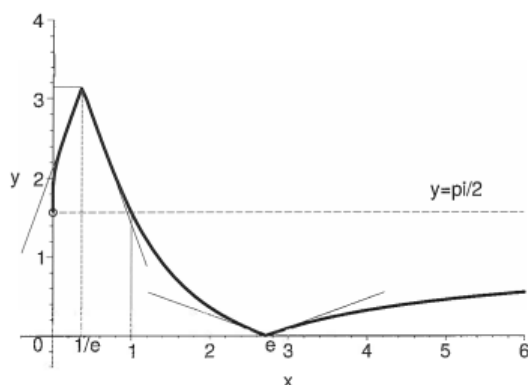
Lokálního maxima nabývá v bodě $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

f je na $(0, \pi)$ konkávní.

Aplikujeme-li i periodicitu, dostáváme následující graf.



f. Viz **vzorové řešení na straně 5**.



Příklad 3.

$$(a) \quad f' = \begin{cases} 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4 \cos x}{\sin^2 x + 1} + 1, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dále pak $f'_+(2k\pi) = 5$, $f'_-(2k\pi) = 1$, $f'_+((2k+1)\pi) = 1$, $f'_-((2k+1)\pi) = -3$.

$$(b) \quad f' = \begin{cases} 0, & x \in (-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x, & x \in (\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- $f'_-(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = \sqrt{3}/2$, $f'_+(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = 0$,
- $f'_-(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = 0$, $f'_+(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2$,
- $f'_-(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2$, $f'_+(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = 0$,

- $f'_-(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi) = 0, f'_+(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi) = \sqrt{3}/2.$

(c) $f' = \frac{2|x|}{x^3+x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'_-(0) = -2, f'_+(0) = 2$

(d) $f'(x) = \begin{cases} e^{x-1}(2x+x^2), & x < 1, \\ e^{1-x}(2x-x^2), & x > 1, \end{cases} f'_-(1) = 3, f'_+(1) = -1.$

(e) $f' = \frac{\sqrt{2}}{(\sin x + \cos x)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\pi/4 + k\pi: k \in \mathbb{Z}\},$

A jednostranné derivace $f'_-(-\pi/4 + k\pi) = \infty, f'_+(-\pi/4 + k\pi) = -\infty.$

(f) $f' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'_-(0) = -1, f'_+(0) = 1$

(g) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 \cdot (1+x^2)^2}}, x \neq 0.$

Jednostranné derivace $f'_-(0) = -\sqrt{2}, f'_+(0) = \sqrt{2}.$

(h) $f'(x) = 2x \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), x \neq 0$
V nule z definice $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} \right) = 0.$

(i) $f'(x) = x^{x^2} \cdot (2x \log x + x).$

(j) $f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \in (0, 1), \\ -2x \sin x^2, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$

Dále $f'(0) = 0$ a $f'_-(1) = -\sin 1, f'_+(1) = -2 \sin 1$

(k) $f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \\ -2x, & x \in \left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \\ 2(x-1), & x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right). \end{cases}$

Pak spočteme jednostranné derivace:

- $f'_-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2 - 2\sqrt{5}, f'_+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$
- $f'_-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 1, f'_+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 + \sqrt{5},$
- $f'_-(0) = -2, f'_+(0) = 0.$

(l) $f'(x) = \begin{cases} \frac{2 \tan x \frac{1}{\cos^2 x}}{1 + \tan^4 x}, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$